Matteo Plebani, *Introduzione alla filosofia della matematica.* Carocci, 2011, pp. 174, € 17.00, ISBN 9788843060313

Michele Pra Baldi, Università degli Studi di Padova

Il libro di Plebani fornisce una ricca panoramica delle principali correnti in filosofia della matematica, concentrandosi sulla nozione di numero e, più in generale, sullo statuto degli enti matematici.

Il primo dei tre capitoli (pp.13-82) affronta la vasta problematica ontologica dell'esistenza dei numeri, le cui domande guida sono: "Ci sono dei numeri?", "Il numero dei numeri è maggiore di 0?" "L'enunciato del linguaggio del primo ordine $\exists xNx$, dove N sta per 'essere un numero', è vero?" (p.21).

In generale, sono possibili due tipi di risposte, che corrispondono alle due prospettive più diffuse a riguardo: il platonismo e il nominalismo.

I primi, tra cui Quine, Putnam, Burgess e Rosen, sostengono che gli oggetti matematici esistano. L'argomento più utilizzato dai platonisti, la cui prima formulazione è dovuta a Colyvan, è l'*Indispensability Argument*, basato su due premesse e una conclusione:

"(P1) Dovremmo impegnarci ontologicamente a tutte e sole le entità indispensabili per la formulazione delle nostre teorie scientifiche.

(P2) Le entità matematiche sono indispensabili alla formulazione delle nostre teorie scientifiche.

(C) Dovremmo impegnarci ontologicamente alle entità matematiche" (p.54).

In modo simile, Burgess e Rosen forniscono una versione estesa dell'argomento, dando luogo a una visione naturalista del platonismo. La premessa centrale del loro ragionamento è: se un'affermazione è giustificata secondo gli standard scientifici, questo è sufficiente per accettarla, indipendentemente da ogni argomento filosofico. Dunque, siccome affermazioni che implicano l'esistenza di entità astratte sono giustificate dalla pratica scientifica, siamo giustificati ad affermare che esistono entità astratte (p.59).

L'ultima versione di platonismo considerata deriva da Frege e recentemente è stata ripresa da Wright e Hale. Troviamo due tesi fondamentali: i numeri sono oggetti; la conoscenza matematica è conoscenza logica. Quest'ultima consente di sostenere che i termini che occorrono negli enunciati matematici hanno una denotazione. Ad esempio, '5' e '2+3' sono termini singolari, ossia le espressioni grammaticali usate per denotare oggetti. "Se questo tipo di espressioni compaiono in enunciati veri, allora esse denotano degli oggetti. 5=2+3 è un enunciato vero, dunque 5 denota un oggetto, in particolare un numero" (p.63). La natura logica della conoscenza matematica, inoltre, è ciò che ci consente di riconoscere la verità di enunciati matematici su base puramente logica.

I nominalisti, invece, sono in disaccordo con tutte le tesi precedenti. Infatti, "essere nominalisti significa sostenere che non esistono entità astratte" (p.65). Tra chi sostiene questa posizione troviamo Chihara e Field. Per Chihara, la soluzione consiste nel trovare un modo di interpretare e utilizzare i teoremi matematici tale da renderli veri, ma senza che questo implichi l'esistenza di un dominio di oggetti astratti. La sua strategia ricorre all'uso di operatori modali, utili a interpretare intensionalmente i quantificatori attraverso l'uso della nozione di mondo possibile. In breve, secondo questa proposta, la traduzione del teorema di Euclide (esistono infiniti numeri primi) $\exists x Nx \wedge \forall x(Nx \rightarrow \exists y(Ny \wedge y > x \wedge Py)$ diviene $\Box\forall x(Nx \rightarrow\Diamond \exists y(Ny \wedge y > x \wedge Py)$. In questo modo, per Chihara, l'esistenza di infiniti numeri primi è sostituita dall'idea che "esiste sempre un mondo possibile dove è stato scritto un numerale più grande di tutti quelli scritti finora" (p.73). Le nozioni modali, tuttavia, coinvolgono entità come 'mondi possibili', che per un nominalista sono tanto problematiche quanto i numeri. Non resta che assumerle come primitive. Quest'aspetto della soluzione di Chihara è spesso oggetto di critica.

La proposta di Field, diversamente, tenta di spiegare che la matematica non ha bisogno di essere vera per essere utile e applicabile. Il fulcro di quest'idea è che possiamo riformulare gli enunciati delle scienze che la utilizzano, come la fisica, senza quantificare su oggetti astratti e, in conseguenza, senza impegnarci ontologicamente verso di questi (nominalizzazione della fisica).

In questa prospettiva, "l'utilità della matematica sta nel suo facilitare le deduzioni di enunciati nominalisti a partire da altri enunciati nominalisti" (p.76).

In chiusura di capitolo viene introdotto il contributo di Yablo, secondo cui la matematica e i suoi oggetti servono come strumenti rappresentazionali. In generale, l'idea è che la matematica svolga lo stesso ruolo del discorso figurativo: esprimere qualcosa che non riusciremmo a esprimere in altro modo (p.81).

La seconda parte del libro (pp.83-118) affronta il tema metafisico più discusso in filosofia della matematica, che riguarda la natura dei numeri e degli enti astratti della matematica. Si tratta di capire se i numeri siano degli oggetti astratti e se, nel caso di risposta affermativa, si distinguano da altri oggetti astratti come personaggi fittizi, proposizioni ecc. Il punto di partenza è il lavoro di Lewis, che individua quattro vie per distinguere oggetti concreti e astratti. Secondo la più celebre di queste vie, "Il tutto viene di solito riassunto dicendo che i numeri ed altre entità astratte […] mancano di una collocazione spazio-temporale e sono causalmente inerti" (p.87).

Particolare spazio è dato alla relazione tra numeri e insiemi: conosciamo almeno due modi distinti di rappresentare i numeri attraverso insiemi (i modi di Zermelo e von Neumann). Possiamo dire che, dopotutto, i numeri *siano* insiemi?

Per Benacerraf, ad esempio, no. Si consideri il numero 2. Nella formulazione di Zermelo 2=$\{\{\emptyset\}\}$, in quella di von Neumann 2=$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Nella situazione limite in cui Ernie abbia imparato solo il metodo di Zermelo e Jonny solo quella di von Neumann, chiaramente i due sarebbero in disaccordo rispetto ai teoremi insiemistici. Infatti, visto che $\{\{\emptyset\}\} \neq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, per Ernie il numero 2 ha proprietà che per Jonny non valgono. In sostanza, le due riduzioni "non possono essere entrambe corrette, visto che il numero 2 non può essere identico a due insiemi diversi […] i numeri non sono insiemi" (p.102).

Un ulteriore passaggio è quello allo strutturalismo, cioè l'idea che la matematica, sulla base del precedente argomento, si occupi di proprietà strutturali, non di oggetti.

Resta da risolvere un problema fondamentale, risalente a un lavoro di Frege e definito da Dummett come "il più pregnante paragrafo filosofico di tutti i tempi". Pregnante è anche il paragrafo 2.5.1 (pp.111-114), che ne discute il contenuto. Come facciamo a spiegare il senso di un enunciato in cui compare un termine numerico come 'Il numero degli F è identico al numero dei G'? La via di Frege è sfruttare il principio di Hume (HP), che afferma: a due concetti spetta lo stesso numero nel caso in cui gli oggetti che cadono sotto quei concetti possano essere messi in corrispondenza 1 a 1: $N(Fx) = N(Gx) \leftrightarrow F \approx G$.

L'idea di Frege e dei neo-fregeani è ritenere (HP) come definizione implicita di numero, nel senso che "chi comprende

(HP) sa tutto quello che c'è da sapere su *cosa sono* i numeri" (p.113).
A questo punto, però, ammesso che sia chiarita la natura dei numeri, sorge spontaneo chiedersi come sia possibile conoscere questo tipo di oggetti. In altre parole, la soluzione alla questione metafisica apre la strada alla domanda epistemologica: com'è possibile conoscere gli oggetti matematici? Questo è il tema del terzo e ultimo capitolo del libro (pp.119-161).
Dopo una breve ricapitolazione di alcune nozioni (base) della semantica tarskiana, viene presentata la strategia di Benacerraf, cioè "una teoria semantica uniforme, nella quale la semantica per le proposizioni matematiche vada in parallelo con la semantica del resto del linguaggio" (p.122). L'ostacolo principale, tuttavia, è lo scarto tra la verità di un enunciato e le sue condizioni di verificabilità. Sia L: 'esistono numeri primi maggiori di 10^8'. La semantica tarskiana è efficace nello stabilire le condizioni di verità di enunciati come L, "ma non spiega affatto, e sembra addirittura rendere inspiegabile, come sia possibile sapere per noi che tali condizioni si verificano" (p.123). Questo perché, secondo Benacerraf, una buona teoria della conoscenza pone come requisito che gli oggetti della conoscenza siano in una qualche relazione causale con il soggetto che conosce. Numeri e insiemi, però, in quanto oggetti astratti, non intrattengono relazioni causali con nulla, il che sembra rendere un mistero come sia possibile ottenere delle conoscenze su di essi. Il problema di come conciliare una buona semantica e una buona epistemologia per gli enunciati matematici è noto in letteratura come *dilemma di Benacerraf*.
Tra le risposte più interessanti al dilemma e a chi sostiene che se la nostra epistemologia è corretta, allora bisogna dubitare dei risultati matematici, c'è quella di Lewis: "i risultati matematici sono molto più sicuri di qualsiasi premessa su cui si basano le considerazioni epistemologiche in base alle quali si vorrebbe metterli in discussione" (p.125).
Un tentativo di riprendere le difese della posizione nominalista di Benacerraf è quello di Field. Punto di forza della proposta è non dipendere da alcuna teoria della conoscenza, evitando così di ricadere nel precedente dilemma. L'argomento si può sintetizzare così (p.128):
(P1) I matematici sono affidabili nelle loro credenze matematiche
(P2) Il fenomeno dell'affidabilità va spiegato

(P3) Il platonismo non è in grado di spiegare il fenomeno dell'affidabilità
(C) Il platonismo non è accettabile.
Le critiche a questa posizione non mancano e, in parte, riprendono le tesi contro il nominalismo menzionate nel primo capitolo.
L'argomento centrale degli ultimi paragrafi è il rapporto tra l'appena citata credenza verso un insieme di assiomi matematici, la loro verità e la nozione di consistenza. Per Field, come già detto, la matematica non necessita di essere vera per essere utile e, allo stesso modo, la consistenza di un insieme di assiomi non implica la loro verità. La posizione platonista che risponde a tali considerazioni è il platonismo della pienezza, per il quale "esistono molti universi matematici, uno per ogni teoria consistente, che è quindi vera dei suoi oggetti matematici. Il conflitto tra due teorie internamente consistenti ma incompatibili tra di loro […] è solo apparente" (p.135). Il classico esempio di una simile situazione è quello dell'estensione della teoria degli insiemi con l'ipotesi del continuo (o la sua negazione).
Il platonismo della pienezza non è la sola via per spiegare la conoscenza matematica. La tesi dei neo-fregeani che (HP) costituisca una definizione del concetto di numero è lo sfondo per sostenere che le verità matematiche sono deducibili per via puramente logica (Hale). L'esistenza dei numeri, dunque, si può derivare attraverso passaggi di sola logica partendo da (HP) (p.144). Con questo si conclude il libro.
In generale, la chiarezza espositiva di quest'introduzione consente di muoversi al meglio tra la grande varietà delle posizioni filosofiche discusse, permettendo al lettore di cogliere l'intreccio tra ontologia, metafisica ed epistemologia in filosofia della matematica.

Link utili

http://www.aphex.it/index.php?Temi=557D03012202740321070 30A777327